不確実性下の意思決定理論 —Ellsbergの逆説とその周辺—

竹治, 康公

平成一一年一一月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第164巻　第5号

瀬地山　敏教授記念號

平成11年11月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第164巻第5号，1999年11月

不確実性下の意思決定理論

——Ellsberg の逆説とその周辺——

竹　治　康　公

I　はじめに

竹治［1997］では Ellsberg の逆説を Shackle の意思決定理論の立場から検討するという作業がなされた。そこでは，Ellsberg の逆説の背後には2種類の不確実性が存在しており，その一方を期待効用理論でうまく処理できないことが原因であることが示され，そのような不確実性について，Shackle の意思決定理論の適用可能性が模索された。その結果，確率的手法によっては処理できない不確実性に，その測度として Shackle の Potential Surprise（以下PS と書く）を適用すれば，Ellsberg の逆説を回避できる可能性があることが示されたが，竹治［1997］では PS と Shackle の意思決定理論の評価について不完全な部分があった。本稿の主な目的は竹治［1997］の不完全な部分をさらに詳細に検討して，不完全さを排除することにある。

竹治［1997］では，Shackle の意思決定理論，特に PS の概念が，Ellsberg の逆説の背後にある情報を記述するための手段としてすぐれたものであることを明らかにする一方で，Ellsberg の逆説には，確率測度で不確実性を記述したほうがよい不確実性が含まれており，そのような不確実性を，あくまで PS で記述しようとすると情報の無駄使いがおきることを示した。そして，情報の無駄使いを防ぐためには確率測度で記述できる不確実性は確率的手法で処理し，PS で記述することが適当な不確実性は Shackle 的な手法で処理すればよい。この立場は，Shackle の意思決定理論を期待効用理論の代替理論とは考えず，

補完理論と考える立場である。

一方，Ellsbergの逆説を回避するための手段として，Schmeidler [1989] や Gilboa [1987] で展開された，確率測度を非加法的確率測度（いわゆる Fuzzy 測度）に拡張した意思決定理論があるが，竹治 [1997] ではそれらについては触れなかった。その理由は，例えば Schmeidler の論文で展開された意思決定理論では，Anscombe and Aumann [1963] の公理系に修正を加える[1]ことによって，選好体系の合理性と非加法的確率分布および効用関数の対応が明らかにされたが，そのような非加法的確率測度はいくらでも存在し，いわゆる優加法的な Fuzzy 測度であればよいから，それらが，Ellsberg の逆説の背後にある不確実性に関する情報の構造とどのような関係を持つのかという問題に対して，明確な説明を与えることが困難に思われたからである。

この点に関して，非常に示唆に富む議論として，Mukerji [1998] による確率のコアという概念がある。不確実性要因に関して確率分布を一意に決めることができず，複数の候補があるとき，任意の結果に付与される確率を，それらの候補のうちでその結果に対して最小確率を与える確率分布の確率を使うというものである。当然，そのような確率のコアは合計が1にならないから，通常の確率測度ではなく，非加法的確率測度になる。このコアを用いて期待値を計算すれば，Ellsberg の逆説は容易に回避することができる。したがって，本稿では，Mukerji [1998] の確率のコアによって Ellsberg の逆説を考えるという作業を通して，非加法的確率測度による不確実性へのアプローチの問題にも評価を行うことにする。

以上のような視点から，まず，第Ⅱ節では，Ellsberg の逆説に含まれる不確実性の構造について説明する。第Ⅲ節では，Mukerji [1998] の確率のコアとショケ積分について解説し，確率のコアを利用することによって，Ellsberg の逆説を回避できることを明らかにし，確率のコアを使った場合の結果の妥当性について評価を行う。第Ⅳ節では，PS の不確実性の測度としての性質を明ら

1) Gilboa [1987] では Savage [1954] の公理系に修正を加えている。

かにし，PS で記述するのが適当な不確実性とはどのような不確実性なのかを明らかにする。第Ⅴ節では，Shackle の意思決定理論における「結果」として「期待値」を使うという手法で Ellsberg の逆説を回避することができることを示す。最後に結論の要約と今後の展望を行う。

II　Ellsberg の逆説と期待効用理論

Ellsberg の逆説の説明の方法には以下の２通りのものがある。なお，本節の内容は，ほぼ竹治［1997］，第２節の再述である。

まず，壷が２つあって，

1. 一方の壷には黒玉が５個と赤玉が５個入っている。
2. もう一方の壷にも黒玉と赤玉が合計10個入っているが，それぞれの個数は不明である。

このような２つの壷があるとして，参加料として金額 1/2 を支払い，

1. 壷を１つ選び，そこから黒玉を取り出せば賞金１がもらえ，赤玉を取り出せば何ももらえない。
2. 壷を１つ選び，そこから赤玉を取り出せば賞金１がもらえ，黒玉を取り出せば何ももらえない。

という２つの賭けを考え，意思決定主体が，どちらの壷から玉を取り出すかを選択する。このとき，ほとんどの意思決定主体は，どちらの問題についても第１の壷を選択する。いま，賞金を獲得した場合の効用を１，何ももらわない場合の効用を０とする。また，第１の壷から黒玉を取り出すという結果に対する意思決定主体の主観的確率評価を $p_1(0 \leq p_1 \leq 1)$，第２の壷から黒玉を取り出すという結果に対する意思決定主体の主観的確率評価を $p_2(0 \leq p_2 \leq 1)$，とする。そして，意思決定主体は期待効用理論の諸前提を満たすように行動するものとすると，意思決定主体が第１の問題で第１の壷を選択したということは，

$$p_1 > p_2, \tag{1}$$

であることを意味する。一方，第２の問題で第１の壷を選択したということは，

$$1-p_1>1-p_2, \tag{2}$$

を意味する。(1)と(2)が同時に成立し得ないことは明かである。

このように，期待効用理論は以上のような意思決定問題を説明することができない。これが Ellsberg の逆説を説明する第1のやり方である。

次に壷の中に，黒玉，赤玉，黄玉の3種類の玉が全部で15個入っている。このうち，黒玉が5個であることはわかっているが，残りの10個については，赤玉がいくつで黄玉がいくつということはまったくわかっていないという状況を考える。このとき，まず，参加料1/3を支払って参加する次のような2つの賭け，

1. 黒玉を取り出せば賞金1がもらえ，それ以外の色では何ももらえない。
2. 赤玉を取り出せば賞金1がもらえ，それ以外の色では何ももらえない。

を提示すると，ほとんどの意思決定主体は前者を選択する。さらに，2つの賭け，参加料1/3を支払って，

1. 黒玉または黄玉を取り出せば賞金1がもらえ，それ以外の色では何ももらえない。
2. 赤玉または黄玉を取り出せば賞金1がもらえ，それ以外の色では何ももらえない。

を提示すると，ほとんどの意思決定主体は後者を選択する。ここで，Ellsberg の逆説に関する第1の説明と同様に，賞金を獲得した場合の効用を1，何ももらわない場合の効用を0とする。黒玉を取り出すという結果に対する意思決定主体の主観的確率評価を $p_1(0\leq p_1\leq 1)$，赤玉を取り出すという結果に対する意思決定主体の主観的確率評価を $p_2(0\leq p_2\leq 1)$，とする。また，黄玉を取り出すという結果に対する意思決定主体の主観的確率評価を $p_3(0\leq p_3\leq 1)$，とする。第1の賭けについては，意思決定主体は，

$$p_1>p_2 \tag{3}$$

という評価を行っていることになる。一方，第2の賭けについては，意思決定主体は，

$$p_1+p_3<p_2+p_3$$

したがって，

$$p_1<p_2 \tag{4}$$

という評価を行っていることになる。(3)と(4)は明らかに矛盾する。これが，Ellsberg の壷の第２の説明方法である[2]。

ただし，どちらの説明方法でも本質的なことは同じなので，本稿では，第１の方法に沿って議論を進める。ここで，Ellsberg の逆説が生じる原因は次のように考えることができる。まず，意思決定主体がどちらの意思決定問題に関しても第１の壷を選択したということは意思決定に際して参照される情報の不確実性が小さい方を選択した，ということができる。つまり，第１の壷に関しては，中に入っている玉の色の構成比率がわかっているのに対して，第２の壷に関しては色の構成比率がわからない。このように，２つの壷の間には明らかに違いがあるが，期待効用理論はこの違いを区別できない。この点をより詳細にみてみよう。第２の壷には，

1. すでに確定している壷の中の黒玉と赤玉の個数がわからない。
2. 黒玉を引くか赤玉を引くかは意思決定時点で確定しておらず，かつ，どちらの玉を引くかということに関して意思決定主体は制御不可能である。

という２種類の不確実性が含まれているのである。第２の不確実性に関して，第１の壷は第２の壷と同様であるが，第１の不確実性に関して第１の壷は壷の中の赤玉と黒玉の個数が判明しているという点が異なっている。期待効用理論はこのうち第１の不確実性に関する差異を区別することができない。ここにEllsbergの逆説が生じる原因がある。

以上のように，Ellsberg の逆説が生じている状況においては，２種類の不確実性が存在して，期待効用理論がその一方を適切に表現できないことが原因であることがわかる。さらに，ここでの Ellsberg の逆説を説明するのに用いた第２の壷の黒玉と赤玉の構成比率に基づいて赤玉を取り出す確率と，黒玉を取

2) 矛盾が生じるのは，この意思決定が Savage の独立性公理を破っているからである。

り出す確率を決めるには,「論拠不十分の原理」によって等確率を付与する以外には合理的に確率を付与することは不可能である[3]。「論拠不十分の原理」の適用は,本質的に確率付与不可能な場合に強制的に確率を付与する手段であるから,確率付与のルールとしては本来,根拠に乏しいものといわざるを得ない[4]。もし論拠不十分の原理の適用による確率付与を認めないとすれば,期待効用理論を含むすべての確率的アプローチは Ellsberg の逆説に対して完全に無力ということになってしまう。したがって,論拠不十分の原理による確率測度の付与を認めないという立場に立てば,Ellsberg の逆説を解決するためには第1の不確実性を記述できるような確率測度以外の不確実性の測度が必要となる。

III Ellsberg の逆説と非加法的確率

非加法的確率による期待効用理論の拡張については Gilboa [1987], Schmeidler [1989] 等で公理論的分析がなされており,基本的には,Savage の独立性公理を共単調独立性公理(comonotonic independence)で置き換えることによって,Savage の確率測度を非加法的確率測度(いわゆるファジー測度)に置き換えることに成功している。非加法的確率測度は加法性を要求しないから,Ellsberg の逆説を回避することが可能な非加法的確率測度が存在する。しかし,Ellsberg の逆説を回避することを可能にする非加法的確率測度が Ellsberg の逆説に付随する情報構造とどのような関係があるのかは明らかにされていない。唯一満たすべき条件は,非加法的確率測度が優加法的[5]であることであり,優加法性を満たす非加法的確率はいくらでもあるので,Schmeidler

3) 第2の不確実性に対しては,黒玉と赤玉の構成比率がわかっているとき,場合の数の比率によって,どちらの玉を引き当てるかという結果に確率を付与することが出来る。

4) 黒玉と赤玉の個数に関して何の情報もないとき,どちらか一方が多いとする根拠が何もないから黒玉と赤玉の個数を同じとみなすのは,それぞれの個数に関して何の情報もない場合に,考えられる多くの可能性のうち黒玉と赤玉の個数が同じであるという可能性を恣意的に選択したと考えることもできる。どちらか一方が多いという根拠がないのと同様に,両方が同じ個数であるという根拠はない。

5) 優加法性については以下で解説する。

や Gilboa の議論だけに依拠して，Ellsberg の逆説を回避することができる非加法的確率と Ellsberg の逆説に付随する情報構造の関連を考えることは不可能である。しかしながら，Mukerji [1998] において示されている**確率のコア**という概念は優加法的な非加法的確率測度に Ellsberg の逆説に付随する情報構造との間に明確な関係を与えるものであり，これを用いて Ellsberg の逆説を考えることには意味があると思われる。以上のような観点から，本節では，確率のコアを用いて，Ellsberg の逆説を考える。ここでは，とりあえず，結果は有限個であり，その結果が不確実性に支配されており，確率分布を持つようなケースを考える。ただし，結果の確率分布を一意に決定することはできず，複数の確率分布の候補が存在する。また，それらの確率分布のうち，どれが真である可能性が高いかということに関して何の情報もなく，したがって，それぞれの確率分布が持つ確率は計算できないような状況を考える。このような状況下での意思決定問題を考えるのに，Mukerji [1998] の確率のコアという概念を利用することができる。

まず，有限の状態空間 $\Omega=\{\omega_i\}_{i=1}^{N}$ を考える。f は行動であり，$f: \Omega \to \mathbf{R}$ である。ω_i に付与される非加法的確率分布 π は，(i) $\pi(\emptyset)=0$，(ii) $\pi(\Omega)=1$，(iii) $\pi(\mathscr{X}\cup\mathscr{Y}) \geq \pi(\mathscr{X})+\pi(\mathscr{Y})-\pi(\mathscr{X}\cap\mathscr{Y})$, for all $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \subset \Omega$ を満たす。ただし，通常，ファジー測度は(iii)の代わりに (iii′) $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y} \Rightarrow \pi(\mathscr{X}) \subseteq \pi(\mathscr{Y})$ を満たしていればよい。(iii)が満たされるとき，ファジー測度は**優加法的**であるといわれる。不等号が逆の場合**劣加法的**といわれる。意思決定主体が曖昧さを回避するのはファジー測度が優加法的である場合である。

以上のような設定のもとで，確率 π のコア $\Pi(\pi)$ は以下のように定義される。

$$\Pi(\pi)=\{\pi_j \in \Delta(\Omega) \mid \pi_j(\mathscr{X}) \geq \pi(\mathscr{X}), \text{ for all } \mathscr{Y} \subset \Omega\}$$

ただし，$\Delta(\Omega)$ は意思決定主体が確率分布の候補としているすべての確率分布の集合である。したがって，$\pi(\mathscr{X})=\min_{\pi_j \in \Pi(\pi)} \pi_j(\mathscr{X})$ である。すなわち，確率のコアは Ω のどのような部分集合に対しても，その部分集合に付与される可

能性のある確率の中の最小値で構成される。したがって，確率のコアは通常の加法的確率にはならない。またそのために，期待値を計算するときにルベーグ積分を用いることができないので，その拡張としてのショケ積分を用いることになる。このときショケ期待値は，

$$\mathbf{CE}(f) = \min_{\pi_j \in \Pi(\pi)} \left\{ \sum_{\omega_i \in \Omega} f(\omega_i)\pi_j(\omega_i) \right\} \tag{5}$$

と定義される。

以上のような確率のコアとショケ期待値の概念を用いて，Ellsberg の壷の問題を分析してみよう。まず，第1の壷は，確率が一意に決まるので，赤玉を引く確率，黒玉を引く確率はそれぞれ1/2である。この場合，ショケ積分はルベーグ積分に一致することが知られているから，通常の期待値を計算すれば(5)で定義された期待値に一致する。一方，第2の壷の場合には，可能な確率分布が11通り存在するので，確率のコアを計算する必要がある。しかし，第2の壷に関しては，確率のコアの計算は容易であり，赤玉を引く確率が0，黒玉を引く確率も0となる。また，赤玉または黒玉を引く確率（ここではこれが全事象となる）は1である。このとき，赤玉を引けば10の賞金がもらえ黒玉を引けば何ももらえないという賭けのショケ期待値は，

$$\mathbf{CE} = 0 \times 10 + 1 \times 0 = 0$$

となる。同様に，黒玉を引けば1の賞金がもらえ赤玉を引けば何ももらえないという賭けのショケ期待値は，

$$\mathbf{CE} = 1 \times 0 + 0 \times 10 = 0$$

となる。一方，第1の壷に関しては，上と同様の賭けのショケ期待値は，

$$\mathbf{CE} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

となり，賭けの対象として第2の壷より第1の壷の方が選好されることになる。同じようにして，もし，事前に，第2の壷に赤玉，黒玉とも少なくとも1つ入っていることがわかっている場合には，赤玉に賭けたときの第2の壷のショケ期待値は，

$$\mathrm{CE}=\frac{1}{10}\times 10+\frac{9}{10}\times 0=1$$

となる。同様の計算により，第2の壷に赤玉，黒玉とも少なくとも m 個入っている場合の賭けのショケ期待値は m となり，壷の中の赤玉と黒玉の個数に関する不確実性が小さいほどショケ期待値は大きくなる。ここでは，Mukerji にならって，曖昧さの程度を

$$\mathscr{A}(\pi(\mathscr{X}))=1-\pi(\mathscr{X})-\pi(\mathscr{X}^c)$$

で定義すると，$\mathscr{A}(\pi(\mathscr{X}))=1-m/5$ となるので，ショケ期待値が曖昧さの程度の減少関数となることがわかる。このように，非加法的確率として，確率のコアという概念を用いると，Ellsberg の逆説を回避することが可能になる。

さらに，確率のコアを使うと，$\mathscr{A}(\pi(\mathscr{X}))$ に明確な意味付けを与えることができる。$\mathscr{A}(\pi(\mathscr{X}))$ は Schmeidler [1989] では単に不確実性プレミアムと呼ばれているが，確率のコアを用いる場合には，それが全事象のうちの欠落部分を，あり得る結果の中で最も小さな利得で評価するという操作がなされていることになる。このような意味付けが可能であることも確率のコアを用いることの一つのメリットといえるだろう。

しかし，この手法には以下のような問題が残ることも指摘しておかなければならない。いま，第3の壷があり，そこには黒玉が10個入っており，赤玉は入っていないことがわかっている。「この壷から，赤玉を引くと賞金が10もらえ，黒玉を引くと何ももらえない」という賭けを考え，この賭けと，「第2の壷から赤玉を引くと賞金が10もらえ，黒玉を引くと何ももらえない」という賭けを比較すると，第2の壷を用いた賭けと第3の壷を用いた賭けは無差別になる。しかし，この選択に関して，意思決定主体が無差別であるとは考えられない。この問題を解決するためには，「確率のコア」というファジー測度を捨て，他のファジー測度を導入するしかない[6]。しかし，Ellsberg の逆説を回避できる「確率のコア」以外のファジー測度を，客観的な測度として定義することは

6) この問題は意思決定主体のリスク態度，すなわち効用関数の形状によって解決することはできない。

困難であり，一般に，意思決定主体によって使うファジー測度は異なる。

以上のように，「確率のコア」という概念を使えば，Ellsberg の逆説は回避できるが，「確率のコア」自体が極端な「曖昧さの回避」になっているので，得をする可能性を否定できない賭けが，確実に損をする賭けより無差別になってしまう。ファジー測度による Ellsberg の逆説へのアプローチは，確率の概念を非加法的なものに拡張することで，Ellsberg の逆説を回避することができるような，くじの上の選好体系が存在することを示すことには成功しているが，意思決定主体がどのようにしてファジー測度を計算すべきかという問題に対しては解決が与えられているとはいえない。

IV PS の意味

本節では Ellsberg の逆説に Shackle の意思決定理論を適用して分析するに先立って，PS の性質，および PS と第 1，第 2 の不確実性との整合性について検討する。第Ⅱ節でも述べたように，Ellsberg の壷の問題に現れる 2 つの壷の間の第 1 の不確実性の差異を確率測度で記述することができない。すなわち，第 1 の壷と第 2 の壷では，意思決定に際して参照されるべき情報が不確実性に関して明らかに異なった構造を持つにもかかわらず，完全に同等な評価を与えられてしまう。これに対して，以下で議論するように，第 1 の不確実性の差異は PS によって正確に記述することができる。特に，第 1 の不確実性について考える場合に，PS の基本的な考え方である，不確実性の指標として「ある結果が実現したときに経済主体が覚えるであろう驚きの程度」を用いるという考え方が重要である。ここでは Ellsberg の逆説に Shackle の意思決定理論を適用するのに先立って，PS について検討を加える。以下は竹治 [1997] における議論とほぼ同じ内容である。

PS は文字どおり，ある結果が実現したときに，意思決定主体が覚えるであろう驚きの程度である。ある結果に関して，それが実現したときの驚きの程度が大きいということは，意思決定主体がその結果が実現する可能性が低いと判

断していると考えてよい。一方，驚きの程度が小さい場合に，意思決定主体はその結果が実現する可能性が高いと判断しているとはいえない。これらの判断を表現を変えてみると，大きな驚きの程度が意味するものは，**ある結果が実現することを否定する根拠があること**であり，小さな驚きの程度が意味するものは，**ある結果が実現することを否定する根拠がないこと**である。ある結果が実現することを否定する根拠がないということは，その結果が実現するか否かわからないということであり，積極的にその結果の実現を支持するものではない。ある結果が実現したとき，その事実を目の前にして驚かないのは，その結果の実現を強く確信している場合だけではない。何が起こるかわからないほど不確実な状況下では，何が起こっても驚かないのである。

PS はこの差異を巧妙に区別することができる。ある1つの結果に対して付与される PS の値が小さく，その結果とは相互背反的な諸結果に対して付与される PS の値が大きいとき，意思決定主体は付与される PS の値が小さな結果の実現を強く確信していると考えることができる。一方，相互背反的な諸結果に対しても付与される PS の値が小さければ，それは，意思決定主体が，何が起こるかわからない，という判断をしていると考えられる。このように，ある結果に対して付与される PS の値が小さい場合には，その結果と相互背反的な結果に付与された PS を考慮に入れなければその結果に対して意思決定主体がどのような判断をしているのかわからない。この点を考慮して，PS が1であるような結果と PS が0であるような結果に関する意思決定主体の判断を，より正確に表現すると，

1. PS が1であるような結果は，それが実現することを確実に否定する理由がある。
2. PS は0であるような結果は，それが実現することを否定する理由が何もない。

となる[7]。すなわち，PS の考え方は，ある結果の実現に関してそれを否定す

7) ここでは，PS の上限値を1としている。

る理由の有無を問題にするのであって，それを肯定する理由の有無を問うものではない[8]。否定する理由を問題にすることの意義は非常に重要である。ある特定の結果が実現することを否定する理由がまったくなく，また，他のすべての結果が実現することを否定する理由が十分にあれば，それは，その特定の結果が実現することを肯定する理由が十分に存在することになるであろう。しかし，特定のどの結果についても，その実現を否定する理由がない場合，どの特定の結果についても，その実現を肯定する理由がないことになる。具体的には，いくつかの結果の中からどれか1つが実現することはわかっているが，それらのうち，どれが実現するかということに関してなんの知識も持っていない場合，あるいは，すでになんらかの結果が実現しているのだが，どの結果が実現しているのかまったくわからないような場合がこれに該当する。

第2の壷はこの種の不確実性に支配されており，第1の壷にせよ，第2の壷にせよ，$s(5)=0$ であるが，第1の壷については $s(n)=1, n\neq5$ であり，第2の壷については $s(n)=0, n\neq5$ である。このようにして，PS は最も確実な場合と最も不確実な場合を区別することができる。形式的に PS が確率測度と大きく異なるのは，加法性を要求しないことである。この差異によって，PS は確率測度が失敗した第1の不確実性の差異を記述することに成功している。

一方，第1の不確実性がない場合，すなわち，壷の中の玉の比率が分かっている場合，取り出す玉の色に関する不確実性は確率測度で記述することが可能である。この場合の PS は以下のように考えればよい。まず，黒玉（赤玉）だけが入っている壷について考えよう。黒玉（赤玉）だけが入っている壷から玉を取り出すとき，確実に黒玉（赤玉）を引く。一方，赤玉（黒玉）を引くことはない。したがって，「黒玉（赤玉）を引く」という結果に付与される PS は0であり，「赤玉（黒玉）を引く」という結果に付与される PS は1である。

次に，黒玉が5個と赤玉が5個入っている壷を考えよう。この壷の場合には，黒玉と赤玉に関しては完全に対称的であるから，「黒玉を引く」という結果と

8) ただし，否定する理由の有無を用いて肯定する理由の有無を測ることは可能である。

「赤玉を引く」という結果に付与される PS は等しくなければならない。さらに，結果は「黒玉を引く」と「赤玉を引く」で尽くされているから，それぞれに付与される PS は 0 でなければならない。これは，Shackle が与えた PS に関する諸仮定のうちの 2 つの仮定による[9]。

2 つの仮定とは，

仮定 6　$s(A \cup B) = \min[s(A), s(B)]$.

仮定 9　$\exists i, s(g_i) = 0$,.

である。仮定 6 があるとき，もし仮定 9 がなければ，全事象に関する Potential Surprise が 0 にならないという事態が生じる。PS に関する仮定を用いて PS が一意に決まるのは以上の場合だけである。

それでは，例えば，黒玉が 7 個と赤玉が 3 個入っている壷から，黒玉を引く，赤玉を引くというそれぞれの結果にはどのように PS を付与すればよいであろうか。まず，PS の公理系により，黒玉を引くという結果に対して付与される PS は 0 である。一方，赤玉を引くという結果に対して付与される PS は $s \in (0, 1)$ であるが，一意に決まる必然性はない。しかし，以下の理由により，壷の中のそれぞれの色玉の個数から計算される確率の大小との整合性を保つ必要がある。

ここで，次のような二つの選択肢から一つを選択する賭けを考えよう。

1. 黒玉が 7 個と赤玉が 3 個入っている壷から黒玉を引けば賞金がもらえ，赤玉を引くと何ももらえない。
2. 黒玉が 6 個と赤玉が 4 個入っている壷から黒玉を引けば賞金がもらえ，赤玉を引くと何ももらえない。

この賭けを提示されれば，ほとんどの意思決定主体は 1 番目の選択肢を選択するであろう。この場合の選択基準は明らかに通常の確率判断である。そして，この確率判断をもっともらしい判断として認め，かつ PS が不確実性の測度としてこの確率判断と整合的であるためには，少なくとも確率測度と単調な関係

9) Shackle [1969], [1979] 参照。

がなければならない。

しかし，上の条件を満たすように PS を与えても，仮定 9 が障害となって Shackle の意思決定理論は Ellsberg の逆説を解決できない，という問題が生じてくる。

V Shackle の意思決定理論と Ellsberg の逆説

Shackle の意思決定理論の Ellsberg の壷の問題への応用については通常以下のような議論がなされる。

まず，第 1 の壷に関する評価は容易である。第 1 の壷には第 1 の不確実性が含まれないから，第 2 の不確実性に関する評価，$(s(B), s(R))=(0, 0)$ である。

第 2 の壷に関しては，第 1 の不確実性と第 2 の不確実性が共存しているので，第 2 の壷から「黒玉を引く」という結果に付与される PS と「赤玉を引く」という結果に付与される PS を決めてやらなければならない。このとき，すべての玉の個数の組み合わせについて，完全な PS の表が必要となるが，PS の定義から一意に PS が決まる 2 つのケース以外の玉の組み合わせについては，必ず，数の多い方の PS が 0 となり，少ない方については $s \in (0, 1)$ となる。そして，少ない方の PS は一意には決まらないが，$s \in (0, 1)$ を満たしている限り，以下の議論には影響を与えない。

いま，「第 2 の壷に黒玉が n 個入っている」という仮説を H^1_{10-n} とする。また，「壷から黒玉を引く」という仮説を H^2_B，「壷から赤玉を引く」という仮説を H^2_R とする。Shackle の仮定 7 [10] および前節の仮定 6 により，

---

10) Shackle の仮定 7 は，

仮説 A に割り当てられた PS の程度を ${}^{A}y$ としたときに，A と仮説 B の結合事象に付与される PS の程度を ${}^{B}y_A$ と書く。また，${}^{A}y=0$ のときの A と B の結合事象に付与される PS の程度を ${}^{B}y_0$ と書く。このとき，

$${}^{B}y_A \leq \max[{}^{A}y, {}^{B}y_0]$$

である。

$$s(B) \leq \max[s(\bigcup_n H^1_{10-n}),\ s(H^2_B)] = \max\left[\min_n[s(H^1_{10-n})],\ s(H^2_B)\right]$$
$$= \max[0,\ 0] = 0$$

となり，$s(R)$ についても同じことがいえるから，第１の壷に関する評価も $(s(B),\ s(R)) = (0,\ 0)$ となる。このようにして，Shackle の意思決定理論では，第１の壷と第２の壷は区別できない。

このような事態が生じたのは，単独試行の結果に対して強制的に PS を付与しようとしたことに原因がある。そのために，Ellsberg の逆説の背後にある，確率分布を与えることを可能にする情報が無視されてしまうことによる。

例えば，壷の中に１から10までの番号のついた玉が１つづつ入っていて，その中から玉を１つ取り出すという試行を考えよう。玉１を取り出すという結果に付与される PS は０である。それは，どの番号の玉もすべて同じ個数（1個）入っていることを反映している。同様に，玉１または玉２または玉３または……玉10という結果に付与される PS はそれが全事象であることより明らかに０である。確率判断との関連で比較すると，1/10 を付与される結果と１を付与される結果が等しい測度を持つことになる。したがって，もし，意思決定主体が第２の不確実性に関して確率判断に従って行動するなら，PS は少なくとも第２の不確実性の測度としては，多くの意思決定主体の行動とは矛盾する。

ここで，第２の不確実性に関して，確率測度によってを不確実性を記述することを許容するか，PS に何らかの修正を加えるかしなければ，Shackle の意思決定理論では Ellsberg の逆説を回避できないことになる。しかし，後者の立場をとっても，これまでの議論から明らかなように，第２の不確実性に関する不確実性の測度は確率測度の単調変換でなければならないという要請がある。その意味では，第２の不確実性を PS によって処理しようとする場合でも，その背後に確率測度に基礎をおく判断が潜在し，しかも PS 自体，確率測度と単調な関係を持たなければならないことは拒否することができない。したがって，第２の不確実性の測度としては通常の確率を使えばよい。

次に第1の不確実性について考えてみよう。第1の不確実性が第2の不確実性と大きく異なる点は，以下の点である。第2の不確実性に関していえば，意思決定を行う時点において，「黒玉を引く」という結果と「赤玉を引く」という結果はいずれも実現され得る可能性として存在している。したがって，「黒玉を引く」という結果と「赤玉を引く」という結果の合併が全事象をなしている。すなわち，「黒玉または赤玉を引く」という結果は真であり，「黒玉も赤玉も引かない」という結果は偽である。「黒玉を引く」という結果や「赤玉を引く」という結果は真でも偽でもない。

一方，第1の不確実性については，「黒玉が n 個入っている」という仮説の集合は，すでに，意思決定を行う時点においていずれか1つの要素のみが真であり他は偽である。どれが真であるか，どれが偽であるかは，確定しており意思決定主体には真偽に関する情報が欠落しているだけである。これは，第2の不確実性が知識の欠落の問題ではないことと対照的である。形式的には，第2の不確実性は，全事象の部分集合のうちどれが真であるかという問題である。これに対して，第1の不確実性は，複数の全事象のうちどれが真であるかという問題と見ることができる。

それでは，PS は第1の不確実性の測度として適当なものといえるであろうか。例えば，「壷が11種類あって，それらから1つの壷をとってくる」という場合には，どの壷をとるかという結果に対して確率測度を用いて不確実性を記述することは妥当である。なぜなら，これは第2の不確実性に支配されている状態だからである。しかし，Ellsberg の逆説に現れる第1の不確実性は「壷が1つあって，それは11種類のうちのどれか」という問題に対応する不確実性である。この不確実性は明らかに「壷が11種類あって，それらから1つの壷をとってくる」という問題とは質的に異なっており，この不確実性を確率測度で記述することは，質的に異なる2種類の不確実性を同一視することであり，Ellsberg の逆説を導いた原因はまさにこのことにある。

前節でも議論したように，PS は，ある結果が実現することを否定する理由

の有無を記述するものである。代替的なすべての結果のうち，どれが実現しているかということに関して完全に無知であるとき，すべての結果に PS=0 が付与される。一方，代替的なすべての結果のうち，どれか1つが実現していることを知っているときには，その結果に PS=0 が付与され，それ以外の結果に PS=1 が付与される。Ellsberg の壷の問題では，第1の壷は後者であり，第2の壷は前者である。このことのより具体的な意味は，第1の壷に関しては，黒玉が5個，赤玉が5個という結果が実現していることに完全な確信を持てるので，この結果が実現していてもまったく驚かない。一方，黒玉と赤玉の数に関して，それ以外の組み合わせは決して実現していないという確信を持てるので，もしそれらが実現していれば最大限の驚きを覚える。これに対して，第2の壷に関しては，黒玉と赤玉の数に関する11通りのすべての組み合わせに関してそれが実現していることを否定する理由が何もなく，どの結果が実現してもまったく驚かない。このように，第1の不確実性に関しては，その測度として PS を用いることによって第1の壷と第2の壷を整合的に区別することができる。

ここで，興味深いのは，PS によって不確実性を記述するとき，すでに判明している第1の壷の玉の色の構成に関する PS と，決定はしているが判明していない第2の壷の玉の色の11通りの構成に関する PS が等しい（PS=0，すなわち，まったく驚かない）にもかかわらず，同じ PS=0 でも，代替的な他の結果に付与される PS によってその意味が大きく異なることである。確率測度を不確実性の測度とする場合には，その完全加法性のために，第2の壷の玉の色の11通りの構成に関して，すべての組み合わせに付与される確率が1になることはできない。一方 PS は加法性を要求されないので，すべての結果に関して PS=0 となることができる。

以上の議論より，以下では Ellsberg の壷の問題の第1の不確実性を PS によって，また，第2の不確実性を確率測度によって記述するという立場で，Ellsberg の壷の問題を考える。以下は竹治［1997］において展開された議論で

ある。

まず，壺の中の黒玉と赤玉の個数の比率によって11通りの期待効用を計算する。効用関数を $U(x)$，黒玉を引く確率を p_B 赤玉を引く確率を p_R とする。また，黒玉の個数を n，とすると，$p_B=n/10$ となる。したがって，n が判明すれば，その壺を前提とした賭けの期待効用は，

$$U(n)=\frac{n}{10}U(1)+\frac{10-n}{10}U(0) \tag{6}$$

となる。

第1の壺に関しては $s(5)=0$, $s(n)=1$, for $n\neq5$ であるから，その期待効用の分布を D_1 と書くと，

$$D_1=\begin{cases}(U(n),1) & n\neq5\\(U(n),0) & n=5\end{cases}$$

一方，第2の壺に関しては，(6)で与えられる，11通りのすべての可能性に対して，$s(n)=0$ となる。したがって，第2の壺の期待効用の分布を D_2 と書くと，

$$D_2=(U(n),0),\qquad \text{for } \forall n$$

となる。

第1の壺と第2の壺の選択問題を考えるためには，それぞれの壺に何らかの評価を与える必要があるが，ここでは，Shackle の意思決定理論にしたがって，Ascendancy 及び Decision Index という手続きによって壺の評価を実行するものとする。

このとき，第1の壺に関する ascendancy の評価を H_1 と書くと，

$$H_1=(U(5),0)$$

という期待効用と PS のペアで記述される[11]。一方，第2の壺に関する ascen-

11) 通常 Shackle の意思決定理論では，最終的な結果は収益と損失に分割され，それぞれの側で ascendancy が行われるが，第1の壺に関して，ここでの評価方法に従うと結果は1通りしかないので，ascendancy による評価はその1点と考えるしかない。また，本稿の例では参加費1/2を支払うことになっているので，とりあえず，Arrow [1951] で指摘された収益側と損失側の分割の問題は回避されている。

dancy の評価を H_2 と書くと，

$$H_2=((U(10),0),(U(0),0))$$

となる。

そして，最後に，Decision Index によって，H_1 と H_2 を比較してやればよい。H_1 と H_2 は一致していないので，$H_1 \gtrsim H_2$ にも $H_1 \prec H_2$ にもなりうる。意思決定主体の第2の不確実性に関する危険回避の程度が小さく，第1の不確実性に関する危険回避の程度が大きいと，Ellsberg の壷の問題に整合的な結論を得ることになる。

この方法の第1の特徴は代替的な確率分布の候補に PS を付与するという方法であり，収益とその確率分布が結果とみなされていることである。第2の特徴は結果の評価に期待効用を使っていることである。通常，期待効用を結果とするという手続きは，意思決定が繰り返し可能でなければ認められないであろう。しかし，ここであえてこの方法を提起するのは，Ellsberg の壷の問題が，第2の不確実性に関しては，現実には1回限りの意思決定であっても，仮想的に繰り返し可能であると考えることができるからである。ここで，仮想的に繰り返し可能ということの意味は，事前に期待値を計算できるということ，すなわち何らかの形で確率分布を与えることが可能という意味である。この概念と主観的確率の概念を認めてしまえば，ほとんどの意思決定問題は，期待効用理論によって処理することができる。通常，Knight-Keynes 的不確実性と呼ばれる，意思決定が1回限りで，かつ相対頻度のような結果の確率分布を与える根拠がないような意思決定問題も期待効用理論によって処理することが可能になる。しかしながら，第1の不確実性に関しては仮想的な繰り返しさえ不可能である。確率分布の分布に関する情報を得るためには現実に意思決定を繰り返す以外に方法はない。

VI 結　　論

以上の議論によって，Ellsberg の壷の問題には2種類の不確実性が含まれて

おり，第2の不確実性は確率的測度によって記述することが可能であるが，第1の不確実性は確率的測度では記述できないことが明らかになった。

第2の不確実性を確率測度で記述できると考えたのは，それぞれの色の玉の個数とすべての玉の個数の比率によって，確率を計算できるということが根拠になっている。このような確率は古典的確率と呼ばれる。従来，確率的手法に関して，Knight の議論を受けて，

1. 結果の集合が完全に特定されていること
2. 意思決定が繰り返し可能であること

が期待効用理論が適用可能になるための条件であるかのように考えられてきた。しかし，意思決定に当たって，たとえ，その意思決定自体が繰り返し可能でない場合でも，仮想的に繰り返し可能性を考えて，確率判断をすることはよくあることであり，また，意思決定主体は可能な限りそのような確率判断に頼って意思決定しようとするであろう。例えば，競馬を考えてみよう。馬Aと馬Bを比較して，馬Aに賭けるとき，「馬Aが勝つ確率が高いから」ということを根拠にするのが普通である。このときの確率は何であろうか？ 特に馬Aと馬Bが何度か直接競争したことがなければ，勝敗に関する相対頻度は使えない。馬の実績や，その日の馬の様子から判断しているのである。しかし，それでも「Aは10回走れば8回はBに勝つ」というような判断をして馬Aに賭けるのが通常である。しかし，そのもとになっているのは，「Aの方がBよりずっと強そうだ」という判断であり，「Aは10回走れば6回はBに勝つ」という判断の根拠になるのは，「AはBよりわずかに強そうだ」という判断である。この「……強そうだ」を「……回はBに勝つ」に変換する作業が，知識あるいは証拠を確率に変換する操作である。

降水確率10％の具体的意味は「同じ気圧配置のもとで10回外に出れば1回雨に遭う」ことである，といわれる。しかし，ある日外に出る意思決定主体にとっては，その日は雨に遭うか遭わないかのいずれかである。だからといって，我々はそれぞれに0の PS を付与して無差別とすることはしない。手術の成功

確率が60％の病院よりは90％の病院で手術を受けるのが普通である。このように，例え1回限りの意思決定であっても，仮想的にでも何らかの形で確率を付与できる場合には確率的手法で不確実性を処理しようとする。しかも，確率的判断の物理的説明は常に相対頻度である。サイコロの目の場合でも，「6面が同等に確からしいから何度も繰り返すとそのうちの1/6だけの回数1の目が出る」と判断するのである。したがって，意思決定が1回限りであることを理由に期待効用理論を適用することは不可能である，とするのはナイーヴである。一方，結果の集合を完全に特定できない場合は，Ellsbergの壷の問題の持つ不確実性とは，性質の違う不確実性であり，本稿では何ら考察していないが今後，考察されるべき重要な問題である。

それでも，壷1が壷2より選好されたということは，壷1の第1の不確実性に関して，意思決定主体は確率的手法では処理できないと考えたからであろう[12]。そこで回避されているのは，「確率を付与するに足る根拠を持たない」という無知である。非加法的確率を用いた分析であれ，Shackleの意思決定理論であれ，意思決定主体はこの無知という曖昧さを回避する。そして，第1の不確実性に関しては仮想的に繰り返しを考えることに意味がない。なぜなら，第2の不確実性に関しては，確率的期待値を計算することができ，たとえ1回限りの意思決定であっても，確率的手法を使うことができる。しかし，第1の不確実性に関しては期待値を計算することができない。壷の中身がどうなっているかという問題は，実際に繰り返し意思決定を行うことによってのみ推測できる。したがって，1回限りの意思決定において仮想的な繰り返しを行うことは不可能である。

また，どの馬が勝つかに賭ける場合には，非常に不確実な情報に基づいて一定の確率判断を下していたが，Ellsbergの壷の問題に現れる第1の不確実性は，我々の日常の意思決定の見地から見ると，非常に特殊な不確実性である。なぜなら，それは，実現する可能性のある結果がすべて特定化されていて，しかも，

12)　もし確率を付与していたら2つの壷は無差別になるはずである。

そのそれぞれに確率を付与できない，ということに関して，極めて明確な根拠がある不確実性である。確率を付与できないということが確実にわかっているのである。我々の通常の意思決定においては，結果を特定でき，しかもそれが極めて近い将来のことであれば，確率を付与できる場合がほとんどであろう。一方で，遠い将来を見据えた繰り返しができないような意思決定の場合には，結果をすべて特定化すること自体が困難であり，しかしながら，非常に薄弱な根拠のもとにAよりBの方が実現する可能性が高そうだ，と考える。「AよりBの方が実現する可能性が高い」ということの意味を問われれば，「10回同じことを繰り返せば8回はAが実現する」という説明をするのが通常である。

以上の考察からわかることは，我々が通常 Knight-Keynes 的不確実性と呼んで，繰り返しが不可能で確率的手法を適用することが適当でない，あるいは確率自体が存在しない，と考えている意思決定問題も多くは，少なくとも仮想的には繰り返しが可能であり，確率的手法によって不確実性を処理することが可能である。Ellsberg の壷の問題に現れる第1の不確実性に関しては仮想的な繰り返しさえ許されない。現実の意思決定が，結果の集合の特定，意思決定の繰り返し可能性，といった問題に関して，曖昧さを持っており，そのために主観確率という概念によって容易に搦めとられてしまうのに対して，Ellsberg の壷の問題の第1の不確実性は主観確率によって搦めとられることのない不確実性の堅固なモデルとなっている。そして，この問題に答えるための一つの方向が非加法的確率であり，今一つの方向が竹治［1997］および本稿で示した PS による方法である。非加法的確率による分析の長所は，それが合理的行動に関するいくつかの仮説から演繹されていることである。一方で，許容される非加法的確率と問題の背後にある不確実性の実体との対応が明確でないという短所があった。この点に関して，本稿で検討した Mukerji の確率のコアという概念は，上の対応を明確にしているが，一方で，確率のコアの定義からして，極端な曖昧回避であるために，第Ⅲ節で提示した矛盾を回避することができない。

これに対して，PS を使えば第1の不確実性を正確に表現することができる

し，極端な曖昧回避もない。しかし，一方で意思決定主体の合理的な行動から導かれたものではないというような問題もある。さらに，Shackle の意思決定理論においては利得と損失の両方を使って焦点要素を求め，それによって行動を評価するが，Arrow [1951] などにも指摘されているように，利得と損失の境界を何処に設ければよいのかというような問題もある。しかし，それにもかかわらず，本稿で Shackle の意思決定理論は，無知を表現する手段としてすぐれたものであることが明らかになった。PS の存在意義は，無知の表現にあるといってよいだろう。

最後に，Shackle の意思決定理論に関して，(1) 結果の集合が完全には特定できない場合の意思決定問題，(2) 0 と上限値（本稿では 1 に正規化した）以外の値をとる PS の意味，(3) Arrow が指摘しているような技術的な問題の解決，(4) Shackle の意思決定理論を意思決定主体の合理的行動の結果と考えることができるか，等を残された課題として挙げることができる。

参考文献

Anscombe, F. J., and R. J. Aumann [1963] "A Definition of Subjective Probability," *The Annals of Mathematical Statistics*, 34, pp. 199-205.

Arrow, K. J. [1951] "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica*, 65, pp. 404-436.

Arrow, K. J. [1966] "Exposition of the Theory of Choice under Uncertainty," *Synthese*, 16, pp. 253-269., Reprinted in *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland, 1974.

Arrow, K. J. and Hurwicz [1972] "An Optimality Criterion for Decision Making under Ignorance" in *Expectation and Uncertainty in Economics*, eds. by C. F. Carter and J. L. Ford, Basil Blackwell, pp. 1-11.

Choquet, G. [1953-1954] "Theory of Capacities," *Annales de l'Institut Fourier*, 5, pp. 131-295.

Ellsberg, D. [1961] "Risk, Ambiguity, and Savage Axioms," *Quartery Journal of Economics*, 75, pp. 336-342.

Ford, J. L. [1944] *G. L. S. Shackle*, Edward Elgar.

Gilboa, I. [1987] "Expected Utility with Purely Subjective Non-additive Probabilities," *Journal of Mathematical Economics*, 16, pp. 65-88.

Knight, F. H. [1921] *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Millfin & Co.（奥隅栄喜訳『危険，不確実性及び利潤』文雅堂銀行研究社，1959年）。

Mukerji, S. [1998] "Ambiguity Aversion and Incompleteness of Contractual Form," *American Economic Review*, 88 (5), pp. 1207-1231.

Neumann, J. von and O. Morgenstern [1954] *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.（鈴林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳『ゲームの理論と経済行動』東京図書，1972-1973年）。

Savage, L. J. [1954] *The Foundations of Statistics*, John Wiley.

Schmeidler, D. [1989] "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity," *Econometrica*, 57, pp. 571-587.

Shackle, G. L. S. [1969] *Decision Order and Time in Human Affairs*, Cambridge University Press, 2nd eds.

Shackle, G. L. S. [1979] *Imagination and the Nature of Choice*, Edinburgh University Press.

Shackle, G. L. S. [1988] *Business, Time and Thought*, Macmillan.

菅野道夫・室伏俊明［1993］『ファジィ測度』（日本ファジィ学会編，講座 ファジィ3）日刊工業新聞社。

竹治康公［1988］「不確実性下の意思決定理論：確率的アプローチと Shackle の理論」『経済論叢』第141巻第4・5号，270-285ページ。

竹治康公［1991］「Shackle の意思決定理論：全体像の検討」『Working Paper Series』神戸学院大学，(B) No. 3。

竹治康公［1992］「Shackle の意思決定理論：再検討」『神戸学院経済学論集』第23巻第4号，109-124ページ。

竹治康公［1997］「Potential Surprise と Ellsberg の逆説」『神戸学院経済学論集』第28巻第4号，39-64ページ。